ESERCIZIO N°MATH.III/"CORSOBASEBLU.MATEMATICA" - B.T.B.Q068+514

("DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE FRATTE NON ELEMENTARI" / SVOLGIMENTO IN FUNCTION MODE)

Risolvere la seguente *Disequazione Goniometrica Fratta* :

$$\frac{\tan x+\sqrt{3}}{2\cos^2 x-1}\leq 0$$

Svolgimento (Metodo Tortorelli)

Risolvere la seguente *Disequazione Numerica Fratta* utilizzando la *Teoria delle Funzioni*.

$$\frac{\tan x+\sqrt{3}}{2\cos^2 x-1}\leq 0$$

Ovvero:

a) Identificare e *Classificare* la *Funzione* $f(x)$ *Associata alla Disequazione* in oggetto.

b) Determinare se la *Funzione* è *Periodica* ed in caso affermativo, stabilire il *Valore* del suo *Periodo T* (giustificando adeguatamente la risposta).

c) Ricercare eventuali *Simmetrie Notevoli della Funzione*.

d) Determinare il $\text{Dom} f(x)$ e scrivere la *Definizione Formale della Funzione*.

(giustificando adeguatamente la risposta).

e) Determinare le *Intersezioni* di $f(x)$ con gli *Assi Cartesiani*.

f) Studiare il *Segno di* $f(x)$.

g) Fornire la *Soluzione della Disequazione Iniziale* in base ad i risultati ottenuti.

h) Graficare per quanto possibile la *Funzione*.

---

a) Identificare e *Classificare* la *Funzione* $f(x)$ *Associata alla Disequazione* in oggetto.

$$\frac{\tan x+\sqrt{3}}{2\cos^2 x-1}\leq 0$$

Alla *Disequazione* in oggetto è associata la *Funzione* :

$$f(x):=\frac{\tan x+\sqrt{3}}{2\cos^2 x-1}$$

Funzione Numerica Matematica Trascendente Goniometrica Razionale Fratta

b) Determinare se la *Funzione* è *Periodica* ed in caso affermativo, stabilire il *Valore* del suo *Periodo T* (giustificando adeguatamente la risposta).

Si dimostra, in base alle *Proposizioni sulla Periodicità* che, la *Funzione f(x)* ha Periodo $T=\pi$.
Infatti:

$$T[N(x)]=T\left[\tan x+\sqrt{3}\right]=[\text{Th.IV}]=\frac{T[\tan x]}{1}=T[\tan x]=\pi$$

$$T[D(x)]=T\left[2\cos^2 x-1\right]=[\text{Th.IV}]=\frac{T\left[\cos^2 x\right]}{1}=T\left[\cos^2 x\right]=[\text{Th.VI}]=\frac{1}{2}\cdot T[\cos x]=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\pi=\pi$$

$$T[f(x)]=T\left[\frac{N(x)}{D(x)}\right]=[\text{Th.XI}]=\frac{1}{2}\cdot T[N(x)]=\frac{1}{2}\cdot\pi=\frac{\pi}{2}$$

Tuttavia, un'analisi del grafico e dei risultati che seguono, smentisce tale risultato in quanto, è evidente da essi che risulta: $T[f(x)]=\pi$.

Questa *Funzione* rappresenta dunque un'eccezione alla validità del *Teorema* XI !!!
Al fine di alleggerire il calcolo, si prosegue con lo studio della *Funzione* non su tutto il *Dominio* ma, solo in un suo *Sotto-Insieme* che però ricopra, esattamente un intero *Periodo*.

Come *Sotto-Dominio Campione* si considera l'*Intervallo Chiuso e Limitato* : $D=[-\pi/2\,;+\pi/2]$

Si proseguirà dunque con lo studio della *Funzione* $\varphi(x)$ definita come la *Funzione* $f(x)$ *Ristretta al Sotto-Insieme* : $\text{Dom} f\cap[-\pi/2\,;+\pi/2]$ al posto di *f(x)*.

c) Ricercare eventuali *Simmetrie Notevoli della Funzione*.

$$f(-x)=\frac{\tan(-x)+\sqrt{3}}{2\cos^2(-x)-1}=\frac{\tan(-x)+\sqrt{3}}{2\cdot[\cos(-x)]^2-1}=\left[\begin{array}{l}\text{Archi Associati Opposti}\\ \tan(-\alpha)=-\tan\alpha\\ \cos(-\alpha)=+\cos\alpha\end{array}\right]=\frac{-\tan x+\sqrt{3}}{2\cdot[+\cos x]^2-1}=$$

$$=\frac{-\tan x+\sqrt{3}}{2\cdot\cos^2 x-1}\neq\frac{+\tan x+\sqrt{3}}{2\cdot\cos^2 x-1}=:f(x)\Rightarrow\neg(f\ \textit{Funzione Pari})$$

$$\Rightarrow f\ \textit{Non Simmetrica Rispetto Asse } y$$

$$-f(-x)=-\frac{-\tan x+\sqrt{3}}{2\cdot\cos^2 x-1}=\frac{\tan x-\sqrt{3}}{2\cdot\cos^2 x-1}\neq\frac{\tan x+\sqrt{3}}{2\cdot\cos^2 x-1}=:f(x)\Rightarrow\neg(f\ \textit{Funzione Dispari})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\ \textit{Non Simmetrica Rispetto Origine } O$$

d) Determinare il $\text{Dom} f(x)$ e scrivere la *Definizione Formale della Funzione*.

Per le osservazioni esposte al *Punto* (b), è sufficiente calcolare il

$$f\ \textit{Funzione Goniometrica}\text{ in }\underline{\tan x}\ \underline{\textit{Fratta}}\Rightarrow\varphi\ \textit{Funzione Goniometrica}\text{ in }\underline{\tan x}\ \underline{\textit{Fratta}}$$

$$\Rightarrow\text{Dom}\,\varphi=\text{Dom}\,f\cap\left[-\frac{\pi}{2}\,;+\frac{\pi}{2}\right]:\begin{cases}\tan x\in\mathbb{R}\\ 2\cos^2 x-1\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq-\dfrac{\pi}{2}\wedge x\neq+\dfrac{\pi}{2}\\ \cos^2 x\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x\neq-\frac{\pi}{2}\wedge x\neq+\frac{\pi}{2} \\ \cos x\neq-\sqrt{\frac{1}{2}}\wedge\cos x\neq+\sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x\neq-\frac{\pi}{2}\wedge x\neq+\frac{\pi}{2} \\ \cos x\neq-\frac{1}{\sqrt{2}}\wedge\cos x\neq+\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x\neq-\frac{\pi}{2}\wedge x\neq+\frac{\pi}{2} \\ \cos x\neq-\frac{\sqrt{2}}{2}\wedge\cos x\neq+\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x\neq-\frac{\pi}{2}\wedge x\neq+\frac{\pi}{2} \\ \cos x\neq-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x\neq+\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}\Rightarrow\left[x\in\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right]:\cos x\geq 0\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x\neq-\frac{\pi}{2}\;\wedge\;x\neq+\frac{\pi}{2} \\ x\in\left[-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right] \\ x\neq-\frac{1}{4}\pi\wedge x\neq+\frac{\pi}{4} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x\neq-\frac{\pi}{2}\;\wedge\;x\neq+\frac{\pi}{2} \\ x\neq-\frac{1}{4}\pi\wedge x\neq+\frac{\pi}{4} \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{Dom} f\cap\left[-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right]=\left[-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right]-\left\{-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{4};+\frac{\pi}{4};+\frac{\pi}{2}\right\}=\left]-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]-\frac{\pi}{4};+\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]+\frac{\pi}{4};+\frac{\pi}{2}\right[.$$

Dunque, la *Definizione Formale* di *f* è:

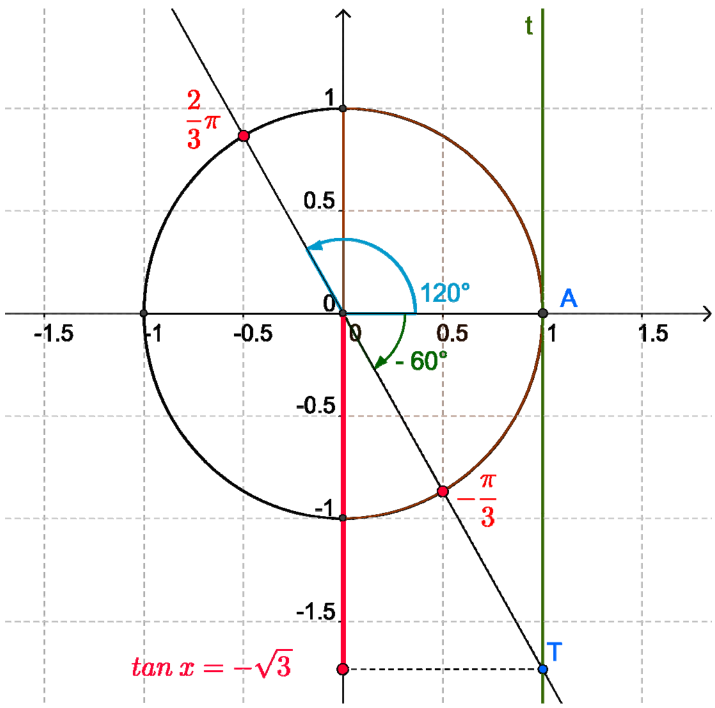
$$f:\ \mathrm{Dom}\, f\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x\longmapsto y=\frac{\tan x+\sqrt{3}}{2\cos^2 x-1}$$

e) Determinare le *Intersezioni* di $f(x)$ con gli *Assi Cartesiani*.

$$\mathrm{Graph}\,\varphi\cap(Asse\,x):\begin{cases} y=\frac{\tan x+\sqrt{3}}{2\cos^2 x-1} \\ y=0 \\ x\in\left[-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} \frac{\tan x+\sqrt{3}}{2\cos^2 x-1}=0 \\ y=0 \\ -\frac{\pi}{2}\leq x\leq+\frac{\pi}{2} \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\frac{N(x)}{D(x)}=0\Leftrightarrow N(x)=0\right]\Rightarrow$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \tan x + \sqrt{3} = 0 \\ y = 0 \\ -\frac{\pi}{2} \le x \le +\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = -\sqrt{3} \\ y = 0 \\ -\frac{\pi}{2} \le x \le +\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\text{cfr. Graph. Laterale}] \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{Graph}\,\varphi \cap (Asse\,x) = \left\{ \left(-\frac{\pi}{3} ; 0 \right) \right\}$$

$$\mathrm{Graph}\,\varphi \cap (Asse\,y): \begin{cases} y = \dfrac{\tan x + \sqrt{3}}{2\cos^2 x - 1} \Rightarrow \\ x = 0 \end{cases} \begin{cases} y = \dfrac{\cancel{\tan 0} + \sqrt{3}}{2\cos^2 0 - 1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2 \cdot 1 - 1} = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{Graph}\,\varphi \cap (Asse\,y) = \left\{ \left(0 ; \sqrt{3} \right) \right\}$$

f) Studiare il *Segno di* $f(x)$.

A tal fine, si comincia con il ricercare a quali *Valori della Variabile Indipendente x* è associata un'*Immagine* $y = f(x) > 0$ (ovvero l'*Immagine di x* è *Positiva* e quindi nel *Piano Cartesiano* il *Punto Associato P*(x ; $f(x)$) si trova nel *Semipiano delle Ordinate Positive*), una volta stabilito ciò, escludendo a priori i *Valori di x* per cui : $y = f(x) = 0$, si individuano (per esclusione) quali sono i *Valori della Variabile Indipendente x* a cui è associata un'*Immagine* $y=f(x) < 0$ (ovvero l'*Immagine* è *Negativa* e quindi nel *Piano Cartesiano* il *Punto Associato P*(x ; $f(x)$) si trova nel *Semipiano delle Ordinate Negative*).

Dunque, in base a quanto appena detto si risolve: $f(x) > 0 \Rightarrow \dfrac{\tan x + \sqrt{3}}{2\cos^2 x - 1} > 0$

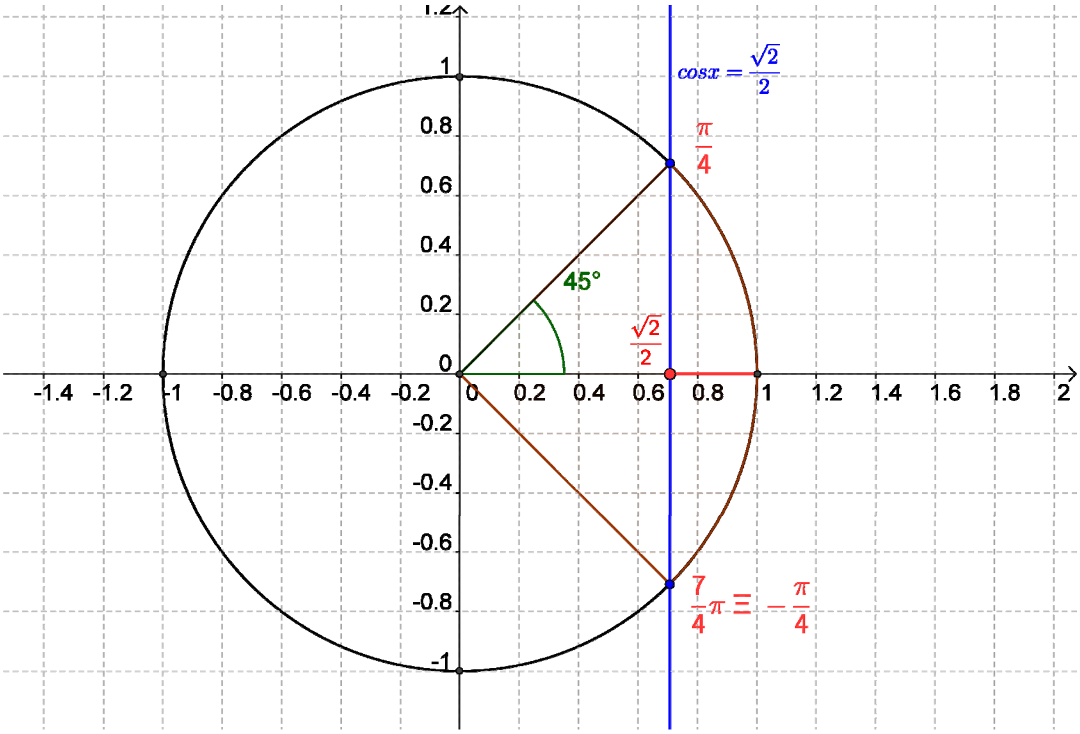
Per le osservazioni esposte al *Punto* (b), è sufficiente calcolare il *Segno* della *Funzione* $\varphi(x)$ definita come la *Funzione* $f(x)$ *Ristretta al Sotto-Insieme* $\mathrm{Dom}\, f \cap [-\pi/2 ; +\pi/2]$

Trattandosi di una *Disequazione Fratta*, si consiglia lo studio separato del *Segno del Numeratore* e del *Denominatore* :

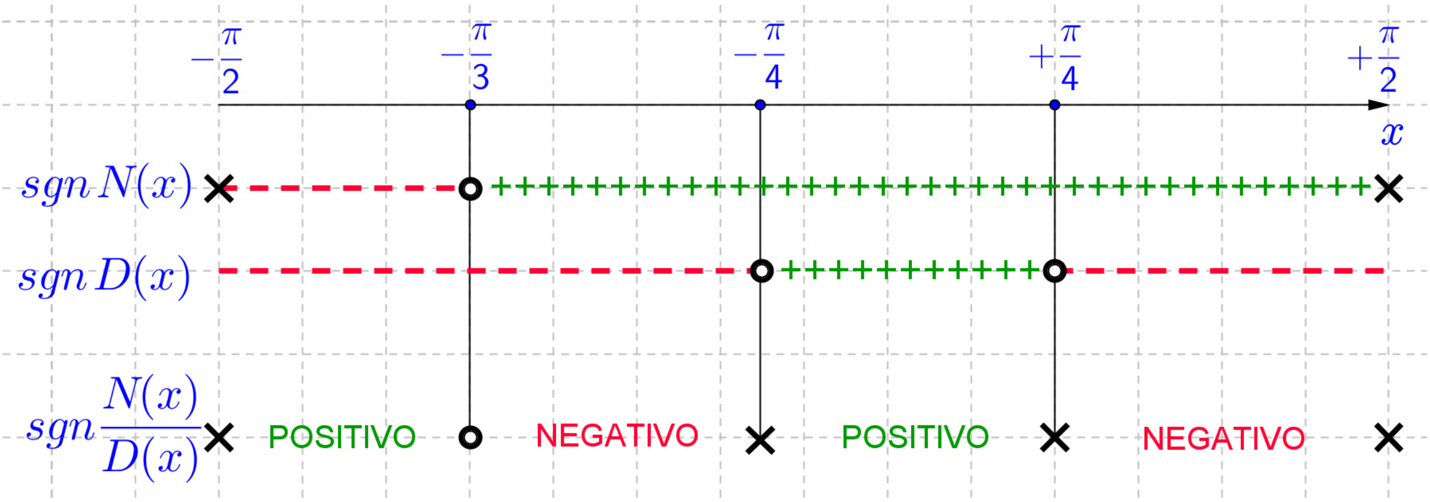
$$N(x) > 0 \Rightarrow \tan x + \sqrt{3} > 0 \Rightarrow \tan x > -\sqrt{3} \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; +\frac{\pi}{2} \right] \\ \text{Graph } Punto \text{ (c)} \end{matrix} \right\rangle \Rightarrow -\frac{\pi}{3} < x < +\frac{\pi}{2}$$

$$D(x) > 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 > 0 \Rightarrow \cos^2 x > \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x < -\sqrt{\frac{1}{2}} \vee \cos x > +\sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow \cos x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \vee \cos x > +\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee \cos x < +\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; +\frac{\pi}{2} \right] \\ \text{Graph in Basso} \end{matrix} \right\rangle \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \underbrace{\cancel{\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}}}_{\text{perché nell'Intervallo Considerato, il coseno è +}} \vee \cos x > +\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} < x < +\frac{\pi}{4}$$



Dunque, in conclusione: $\operatorname{sgn}(\varphi(x)) : \left\langle \begin{array}{l} \varphi(x) > 0 \ \ \forall x \in \left(\left] -\frac{\pi}{2} ; -\frac{\pi}{3} \right[\cup \left] -\frac{\pi}{4} ; +\frac{\pi}{4} \right[\right) \\ \varphi(x) = 0 \ \ \forall x \in \left\{ -\frac{\pi}{3} \right\} \\ \varphi(x) < 0 \ \ \forall x \in \left(\left] -\frac{\pi}{3} ; + -\frac{\pi}{4} \right[\cup \left] +\frac{\pi}{4} ; +\frac{\pi}{2} \right[\right) \end{array} \right.$

Dunque, generalizzando alla *Funzione f* ed al suo *Dominio* :

$$\operatorname{sgn}\left(f(x)\right):\left\langle\begin{array}{l} f(x)>0\ \forall x\in\left(\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;-\frac{\pi}{3}+k\pi\right[\cup\left]-\frac{\pi}{4}+k\pi\,;+\frac{\pi}{4}+k\pi\right[\right) \\ f(x)=0\ \forall x\in\left\{-\frac{\pi}{3}+k\pi\right\} \\ f(x)<0\ \forall x\in\left(\left]-\frac{\pi}{3}+k\pi\,;+-\frac{\pi}{4}+k\pi\right[\cup\left]+\frac{\pi}{4}+k\pi\,;+\frac{\pi}{2}+k\pi\right[\right) \end{array}\right. ;\ k\in\mathbf{Z}$$

g) Fornire la *Soluzione della Disequazione Iniziale* in base ad i risultati ottenuti.

Si richiede di risolvere la *Disequazione*: $\dfrac{\tan x+\sqrt{3}}{2\cos^2 x-1}\le 0$

$$\Leftrightarrow\ f(x)\le 0\ \Leftrightarrow\ [\textit{Punto}\ (\mathrm{d})]\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(-\frac{\pi}{3}+k\pi\le x<-\frac{\pi}{4}+k\pi\right)\vee\left(+\frac{\pi}{4}+k\pi<x<+\frac{\pi}{2}+k\pi\right);\ k\in\mathbf{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow S=\left(\left[-\frac{\pi}{3}+k\pi\,;+-\frac{\pi}{4}+k\pi\right[\cup\left]+\frac{\pi}{4}+k\pi\,;+\frac{\pi}{2}+k\pi\right[\ ;\ k\in\mathbf{Z}\right)=$$

(*Insieme delle Soluzioni della Disequazione Non Standardizzato*

$$=\left(\left]+\frac{\pi}{4}+k\pi\,;+\frac{\pi}{2}+k\pi\right[\cup\left[+\frac{2}{3}\pi+k\pi\,;+\frac{3}{4}\pi+k\pi\right[\ ;\ k\in\mathbf{Z}\right).$$

(*Insieme delle Soluzioni della Disequazione Standardizzato*

h) Graficare per quanto possibile la *Funzione*.

Non essendo la *Funzione* oggetto di studio una *Funzione Notevole*, non è possibile a questo livello di conoscenze rappresentarla al meglio. Tuttavia, è possibile riportare sul *Piano Cartesiano* tutte le informazioni raccolte nel corso dello *Studio Parziale della Funzione*.

In particolare, riporteremo:

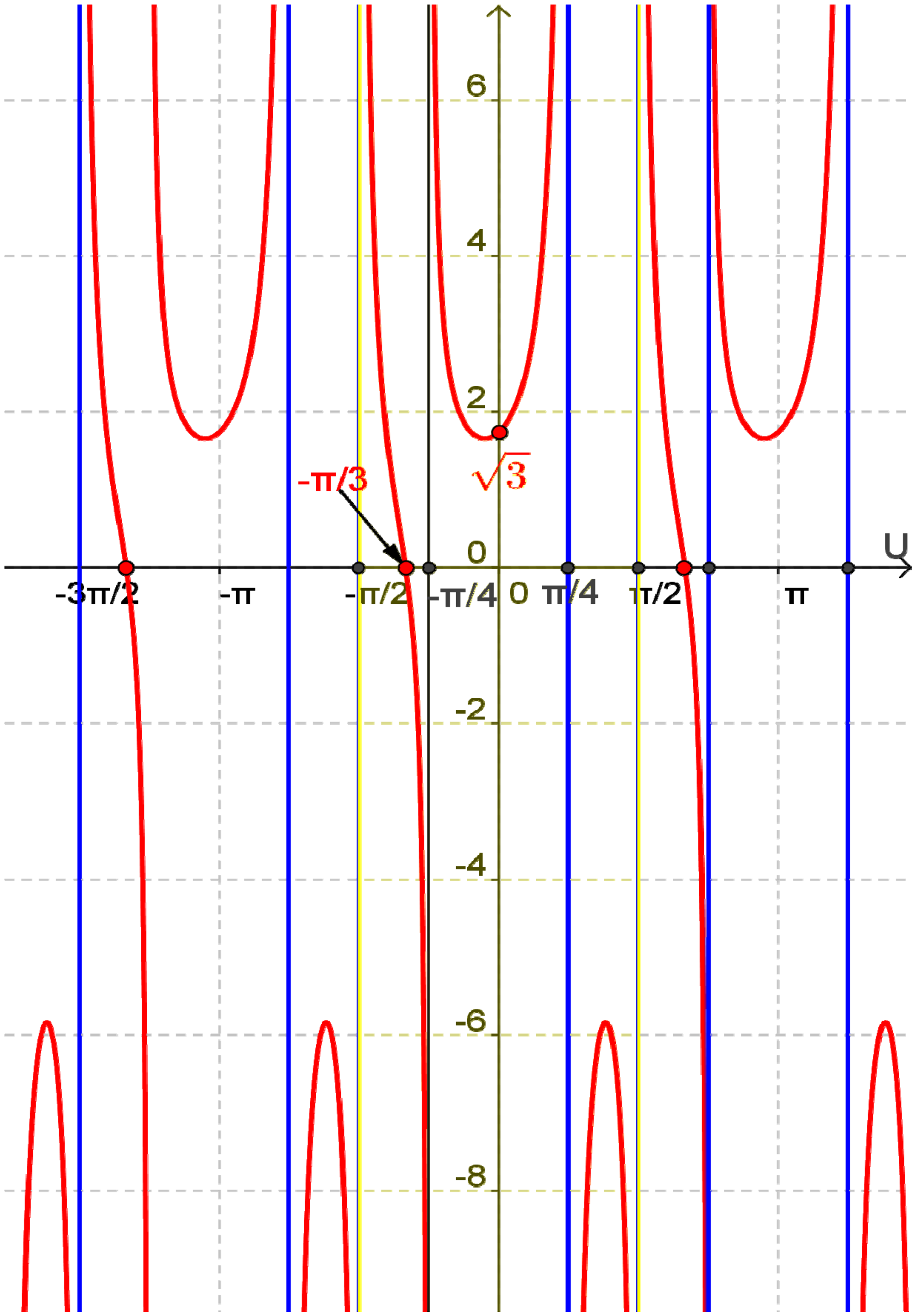
I) Eventuali *Simmetrie Notevoli del Grafico della Funzione*.

II) Il *Dominio* della *Funzione*.

III) Le *Intersezioni* del *Grafico della Funzione* con gli *Assi Cartesiani*.

IV) Le aree ammesse al *Grafico della Funzione* sulla base dello *Studio del Segno*, tutte quelle *Porzioni di Piano Interdette al Grafico della Funzione*.

V) Se la *Funzione* è *Periodica* si procederà con la *Realizzazione del Grafico nel Periodo Studiato* e la sua “clonazione” su tutto l’*Asse Reale*.


6
4
2
√3
-π/3
0
y
-3π/2
-π
-π/2
-π/4
0
π/4
π/2
π
-2
-4
-6
-8